

EXAMEN PARCIAL - 10 de diciembre de 2014
Esquema de resolución

TEMA 1

1. Sean $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la reflexión respecto del eje x_2 , y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, la proyección ortogonal sobre la recta de ecuación $4x_2 - x_1 = 0$.

(a) Halle la representación matricial de f y de g en base canónica.

$$[g]_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [f]_E = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Halle la matriz, en base canónica, de h , la transformación que refleja un vector de \mathbb{R}^2 respecto del eje x_2 y luego proyecta sobre la recta de ecuación $4x_2 - x_1 = 0$. Es h inversible?

$h = f \circ g$ con lo cual $[h]_E = [f]_E[g]_E$ y h no es inversible pues su matriz no lo es, por ejemplo.

2.

Sean V un espacio vectorial real, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V , $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 , $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $h : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones lineales definidas por:

$$g(v_1) = e_1, \quad g(v_2) = e_1 + e_2, \quad g(v_3) = e_1 - e_2 \\ h(v_2 + v_3 - 2v_1) = (0 \ 0 \ 0)^T, \quad h(v_2 - v_3) = 2e_2, \quad h(v_2 + v_3) = 2e_1.$$

Es verdad que $g = h$?

Sí, es verdad pues sobre cada uno de los vectores de B tanto g como h valen lo mismo.

3. Sea $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ matriz de proyección tal que $P(2 \ 1 \ -2 \ 1)^T = (0 \ 1 \ 0 \ 1)^T$. Sea $b \in \mathbb{R}^4$ tal que $b - (2 \ 1 \ -2 \ 1)^T \in \text{Col}(P)$.

(a) Calcule la proyección ortogonal de b sobre $\text{Nu}(P)$.

De los datos se deduce que la proyección ortogonal de b sobre $\text{Nu}(P)$ es $(2 \ 0 \ -2 \ 0)^T$.

(b) Si $\|P(\frac{1}{2} \ 3 \ 0 \ 2)^T - b\| = \|(2 \ 0 \ -2 \ 0)\|$, es $(\frac{1}{2} \ 3 \ 0 \ 2)^T$ solución por cuadrados mínimos del sistema $Px = b$?

La respuesta es sí pues $\|(2 \ 0 \ -2 \ 0)\| = \|P_{\text{Nu}(P)}(b)\|$ es la distancia entre b y $\text{col}(P)$.

4. Sea $T : P_1 \rightarrow P_1$ tal que $T(p) = (1 + 6x)p' - 6p$.

(a) Halle bases de $\text{Nu}(T)$ y de $\text{Im}(T)$.

$$\text{Nu}(T) = \text{gen}\{1 + 6x\} \text{ y } \text{Im}(T) = \text{gen}\{1\}.$$

(b) Halle, si existen, bases B_1 y B_2 de P_1 tal que $[T]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Por ejemplo, $B_1 = \{1, 6x\}$ y $B_2 = \{-6, x\}$.

5. Sabiendo que para cierto producto interno definido en \mathbb{R}^3 la base $\{(1 \ 1 \ 1)^T, (1 \ 1 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 0)^T\}$ es ortonormal, calcule $\text{dist}((4 \ 0 \ 0)^T, S)$ siendo $S = \text{gen}\{(2 \ 2 \ 1)^T, (0 \ 0 \ 1)^T\}$.

Sea B la base ortonormal del dato. Luego el producto interno $(\ , \)$ se puede calcular como $(x, y) = [x]_B^T [y]_B$ para $x, y \in \mathbb{R}^3$. Resulta que $S^\perp = \text{gen}\{(1 \ 0 \ 0)^T\}$ con lo cual $\text{dist}((4 \ 0 \ 0)^T, S) = \|(4 \ 0 \ 0)^T\| = 4$.